

# Propositielogica

Het maken van een waarheidstabel

Eindhoven, 4 juni 2011

## De propositielogica

Zoekopdrachten met de operatoren **AND**, **OR** en  $-$  zijn zogenaamde Booleaanse expressies. Een **Booleaanse expressie** is opgebouwd uit proposities en operatoren zoals  $\wedge$  (én),  $\vee$  (óf) en  $\neg$  (niet). Alhoewel deze operatoren er anders uitzien dan in de zoekopdrachten die we eerder hebben gezien, zijn het precies dezelfde operatoren.

Een **propositie** is een uitspraak die óf waar is óf onwaar is. De uitspraak “mijn band van mijn fiets is lek” is een voorbeeld van zo’n propositie: als mijn band inderdaad lek is, is deze uitspraak waar en anders is deze uitspraak onwaar. In het geval van een zoekopdracht kun je de losse zoekterm  $zoekterm_1$  lezen als de propositie “De webpagina bevat het woord  $zoekterm_1$ ”. Als deze propositie geldt dan zal de zoekmachine die webpagina opnemen in de lijst met zoekresultaten.

Het vakgebied dat gaat over het “rekenen” met proposities noemen we de **propositielogica**. In de propositielogica geven we proposities vaak aan met een enkele letter, bijvoorbeeld:  $P$  = “mijn band van mijn fiets is lek” en  $Q$  = “de stoel heeft drie poten”. We kunnen die letters vervolgens gebruiken in samengestelde Booleaanse expressies, zoals  $P \wedge \neg Q$ .

In de wiskunde reken je met getallen. Er zijn oneindig veel getallen waarmee je wiskundige expressies kunt maken. Booleaanse expressies zijn wat dat betreft een stuk eenvoudiger; er zijn maar *twee* Booleaanse waarden: **waar** en **onwaar**. Soms worden deze twee waarden voorgesteld door, respectievelijk, de twee getallen 1 en 0. Een propositie is dus een uitspraak die de waarde **waar** (1) óf de waarde **onwaar** (0) heeft.

---

## De Booleaanse operatoren $\neg$ , $\wedge$ en $\vee$

De al bekende Booleaanse operatoren worden als volgt gedefiniëerd:

### De negatie

$$\neg P$$

We zeggen: *niet P*.

De negatie van  $P$  is **waar** als  $P$  **onwaar** is en andersom. In een waarheidstabel:

$P$	$\neg P$
0	1
1	0

### De conjunctie

$$P \wedge Q$$

We zeggen: *P en Q*.

De conjunctie van  $P$  en  $Q$  is **waar** als zowel  $P$  én  $Q$  **waar** zijn. In elk ander geval is deze expressie **onwaar**. In een waarheidstabel:

$P$	$Q$	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

### De disjunctie

$$P \vee Q$$

We zeggen: *P of Q*.

De disjunctie van  $P$  en  $Q$  is **waar** als  $P$  óf  $Q$  óf zowel  $P$  en  $Q$  **waar** zijn. In een waarheidstabel:

$P$	$Q$	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

---

## Het maken van een waarheidstabel

Zoals je ziet, worden de Booleaanse operatoren gedefiniëerd met behulp van een waarheidstabel. Een *waarheidstabel* van een Booleaanse expressie is een tabel waarin alle mogelijke waarden van de proposities in die expressie en de expressie zelf worden opgesomd. Vaak worden als tussenstap in de berekening van de hele expressie deelexpressies ook opgenomen in de tabel. Een voorbeeld:

Er wordt gevraagd de waarheidstabel van  $P \vee (\neg Q \wedge P)$  te maken. We doen dat in een aantal stappen:

1. Aan de rechterkant van het blad, schrijven we de *hele* expressie, ervoor zetten we een dubbele streep:

$$\parallel P \vee (\neg Q \wedge P)$$

2. Vervolgens schrijf je *alle* deelexpressies op voor de dubbele streep, gescheiden door enkele streep. Een deelexpressie herken je als volgt:

- (a) het is een expressie tussen ronde haakjes, in dit geval  $\neg Q \wedge P$ , óf
- (b) het is een expressie voorafgegaan door het niet-symbool ( $\neg$ ), in dit geval  $\neg Q$ .

$$\neg Q \mid \neg Q \wedge P \parallel P \vee (\neg Q \wedge P)$$

3. Hierna volgt weer een dubbele streep waarna je alle *enkelvoudige* proposities opsomt. In dit geval zijn dat de twee letters  $P$  en  $Q$ . Je scheidt de verschillende proposities door middel van een enkele streep:

$$P \mid Q \parallel \neg Q \mid \neg Q \wedge P \parallel P \vee (\neg Q \wedge P)$$

4. In de kolommen van de enkelvoudige proposities vul je vervolgens alle mogelijke combinaties van de waarden 0 en 1 in:

$P$	$Q$	$\neg Q$	$\neg Q \wedge P$	$P \vee (\neg Q \wedge P)$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Zijn er twee enkelvoudige proposities, dan zijn er precies vier verschillende combinaties. Bij drie enkelvoudige proposities zijn er acht verschillende combinaties. Je hoeft geen waarheidstabellen te maken met meer dan drie enkelvoudige proposities.

5. Van links naar recht vul je nu alle kolommen in. In dit geval:

- (a) De kolom  $\neg Q$ . Schrijf de Booleaanse expressie van de kolom over en vul de al berekende onderdelen meteen in. In dit geval is het “berekende” onderdeel  $Q$ : dat zijn de waarden uit de kolom  $Q$ .

$P$	$Q$	$\neg Q$	$\neg Q \wedge P$	$P \vee (\neg Q \wedge P)$
0	0	$\neg 0 = ?$		
0	1	$\neg 1 = ?$		
1	0	$\neg 0 = ?$		
1	1	$\neg 1 = ?$		

Zoek vervolgens de bijbehorende waarde op in de tabel van de bijbehorende operator. In dit geval de waarheidstabel van de *niet*-operator ( $\neg$ )

niet	
$P$	$\neg P$
0	1
1	0

$P$	$Q$	$\neg Q$	$\neg Q \wedge P$	$P \vee (\neg Q \wedge P)$
0	0	$\neg 0 = 1$		
0	1	$\neg 1 = 0$		
1	0	$\neg 0 = 1$		
1	1	$\neg 1 = 0$		

- (b) De kolom  $\neg Q \wedge P$ . Schrijf de Booleaanse expressie van de kolom over en vul de al berekende onderdelen meteen in. In dit geval zijn dit het “berekende” onderdeel  $P$  en de zojuist uitgerekenen kolom  $\neg Q$ .

$P$	$Q$	$\neg Q$	$\neg Q \wedge P$	$P \vee (\neg Q \wedge P)$
0	0	$\neg 0 = 1$	$1 \wedge 0 = ?$	
0	1	$\neg 1 = 0$	$0 \wedge 0 = ?$	
1	0	$\neg 0 = 1$	$1 \wedge 1 = ?$	
1	1	$\neg 1 = 0$	$0 \wedge 1 = ?$	

Zoek vervolgens de bijbehorende waarde op in de tabel van de bijbehorende operator. In dit geval die van de *én*-operator.

$P$	$Q$	$\neg Q$	$\neg Q \wedge P$	$P \vee (\neg Q \wedge P)$
0	0	$\neg 0 = 1$	$1 \wedge 0 = 0$	
0	1	$\neg 1 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$	
1	0	$\neg 0 = 1$	$1 \wedge 1 = 1$	
1	1	$\neg 1 = 0$	$0 \wedge 1 = 0$	

én		
$P$	$Q$	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- (c) Uiteindelijk vul je ook de laatste kolom, met daarin de gehele Booleaanse expressie, op dezelfde manier in: je schrijft de Booleaanse expressie over en je vult alle eerder berekende onderdelen meteen in. In dit geval dus die van de kolom  $\neg Q \wedge P$  en  $P$ .

$P$	$Q$	$\neg Q$	$\neg Q \wedge P$	$P \vee (\neg Q \wedge P)$
0	0	$\neg 0 = 1$	$1 \wedge 0 = 0$	$0 \vee 0 = ?$
0	1	$\neg 1 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$	$0 \vee 0 = ?$
1	0	$\neg 0 = 1$	$1 \wedge 1 = 1$	$1 \vee 1 = ?$
1	1	$\neg 1 = 0$	$0 \wedge 1 = 0$	$1 \vee 0 = ?$

Tot slot zoek je de bijbehorende waarden op in de tabel van de juiste Booleaanse operator, de *óf*-operator in dit geval.

$P$	$Q$	$\neg Q$	$\neg Q \wedge P$	$P \vee (\neg Q \wedge P)$
0	0	$\neg 0 = 1$	$1 \wedge 0 = 0$	$0 \vee 0 = 0$
0	1	$\neg 1 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$	$0 \vee 0 = 0$
1	0	$\neg 0 = 1$	$1 \wedge 1 = 1$	$1 \vee 1 = 1$
1	1	$\neg 1 = 0$	$0 \wedge 1 = 0$	$1 \vee 0 = 1$

<b>óf</b>		
P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Je kunt bij het invullen van een kolom ook volstaan met enkel het invullen van de uitkomst in die kolom. Natuurlijk schrijf je wel altijd de volledige Booleaanse expressie bovenaan de kolom.

## Booleaanse expressies met twee enkelvoudige proposities

**opgave 1** Maak de waarheidstabel van de Booleaanse expressie  $\neg P \wedge \neg Q$  verder af:

$P$	$Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
0	0	$\neg 0 = .$	$\neg 0 = .$	$. \wedge . = .$
0	1	$\neg 0 = .$	$\neg 1 = .$	$. \wedge . = .$
1	0	$\neg 1 = .$	$\neg 0 = .$	$. \wedge . = .$
1	1	$\neg 1 = .$	$\neg 1 = .$	$. \wedge . = .$

Gebruik de waarheidstabellen van de Booleaanse operatoren *niet* ( $\neg$ ) en *én* ( $\wedge$ ).

**opgave 2** Maak de waarheidstabel van de Booleaanse expressie  $\neg P \vee \neg Q$  verder af:

$P$	$Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
0	0			$. \vee . = .$
0	1			$. \vee . = .$
1	0			$. \vee . = .$
1	1			$. \vee . = .$

Gebruik de waarheidstabellen van de Booleaanse operatoren *niet* ( $\neg$ ) en *óf* ( $\vee$ ).

**opgave 3** Maak de waarheidstabel van de Booleaanse expressie  $\neg P \vee (P \wedge \neg Q)$  verder af:

$P$	$Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \vee (P \wedge \neg Q)$
0	0			$0 \wedge . = .$	$. \vee . = .$
0	1			$0 \wedge . = .$	$. \vee . = .$
1	0			$1 \wedge . = .$	$. \vee . = .$
1	1			$1 \wedge . = .$	$. \vee . = .$

Gebruik de waarheidstabellen van alledrie de Booleaanse operatoren *niet* ( $\neg$ ), *én* ( $\wedge$ ) en *óf* ( $\vee$ ).

**opgave 4** Maak de waarheidstabel van de Booleaanse expressie  $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$  verder af:

$P$	$Q$	$P \wedge Q$	$\neg$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Gebruik de waarheidstabellen van alledrie de Booleaanse operatoren *niet* ( $\neg$ ), *én* ( $\wedge$ ) en *óf* ( $\vee$ ).

**opgave 5** Maak de waarheidstabel van de Booleaanse expressie  $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$  verder af:

$P$	$Q$				
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

**opgave 6** Maak de waarheidstabel van de Booleaanse expressie  $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ :

---

## Booleaanse expressies met drie enkelvoudige proposities

**opgave 7** Maak de waarheidstabel van de Booleaanse expressie  $P \vee (Q \wedge R)$  verder af:

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

**opgave 8** Maak de waarheidstabel van de Booleaanse expressie  $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$  verder af:

P	Q	R	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

**opgave 9** Maak de waarheidstabel van de Booleaanse expressie  $P \wedge \neg(Q \wedge \neg R)$  verder af:

P	Q	R	$\neg(Q \wedge \neg R)$	$P \wedge \neg(Q \wedge \neg R)$
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

---

**opgave 10** Maak de waarheidstabel van de Booleaanse expressie  $P \wedge (\neg R \vee (Q \wedge R))$ :


### Extra opgaven

**opgave 11** Maak de waarheidstabel van de Booleaanse expressie  $Q \vee (P \vee \neg(Q \vee \neg P))$ .

**opgave 12** Maak de waarheidstabel van de Booleaanse expressie  $\neg Q \wedge (P \vee (Q \wedge \neg P))$ .



---

**opgave 13** Maak de waarheidstabel van de Booleaanse expressie  $\neg P \vee \neg(P \vee (Q \vee \neg R))$ .

**opgave 14** Maak de waarheidstabel van de Booleaanse expressie  $\neg P \vee \neg(P \vee \neg(Q \vee \neg(R \vee \neg Q)))$ .

**opgave 15** Maak de waarheidstabel van de Booleaanse expressie  $\neg(P \wedge (\neg(\neg Q) \vee (R \wedge \neg P)))$ .

---